

Matemática Financeira

3^a Edição
REVISTA E
AMPLIADA

Teoria e Prática

Fernanda Matias
Ana Martins
Carlos Monteiro
Telma Correia



EDIÇÕES SÍLABO

Matemática Financeira

Teoria e Prática

FERNANDA MATIAS

ANA MARTINS

CARLOS MONTEIRO

TELMA CORREIA

3^a EDIÇÃO

Revista e ampliada

EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro.

As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor.

Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos.

O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Matemática Financeira – Teoria e Prática

Autores: Fernanda Matias, Ana Martins, Carlos Monteiro, Telma Correia

© Edições Sílabo, Lda.

Capa: Pedro Mota

Imagen da capa: Anthony Baggett | Dreamstime.com

1^a Edição – Lisboa, fevereiro de 2020

3^a Edição – Lisboa, setembro de 2025

Impressão e acabamentos: ARTIPOL – Artes Tipográficas, Lda.

Depósito Legal: 550814/25

ISBN: 978-989-561-433-2



Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2

1170-100 Lisboa

Tel.: 218130345

e-mail: silabo@silabo.pt

www.silabo.pt

Índice

Nota Introdutória	9
--------------------------	---

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1. Operações financeiras ativas e passivas	13
1.2. Capital, tempo, juro e taxa de juro	14
1.3. Capitalização, valor acumulado, atualização e valor atual	15
1.4. Regimes de juros	17
Conceitos	18

Capítulo 2

Regimes de juros

2.1. Regime de juro simples	21
2.1.1. Capitalização e atualização	21
2.1.2. Modalidades de desconto	24
2.1.3. Equivalência de capitais	28
2.1.4. Taxa de juro média	33
2.2. Regime de juro composto	35
2.2.1. Capitalização e atualização	35
2.2.2. Equivalência de capitais	40
2.2.3. Taxa de juro média	44
2.2.4. Capitalização instantânea	46
2.3. Comparação dos regimes de juros	47

Conceitos	49
Formulário	50
Exercícios propostos com resolução	51
Exercícios propostos com solução	56

Capítulo 3

Taxas de juro

3.1. Taxas equivalentes	65
3.1.1. Regime de juro simples	65
3.1.2. Regime de juro composto	66
3.2. Taxas nominais e efetivas	67
3.3. Taxa Anual de Encargos Efetiva Global (TAEG)	70
3.4. Taxa Anual Efetiva (TAE)	74
3.5. Taxas correntes e reais	76
3.6. Taxas brutas e líquidas	77
3.7. Taxas fixas e variáveis	78
3.8. Taxa supletiva de juros de mora	80
Conceitos	81
Formulário	82
Exercícios propostos com resolução	83
Exercícios propostos com solução	86

Capítulo 4

Rendas financeiras

4.1. Conceito e características das rendas	93
4.2. Classificação das rendas	93
4.3. Rendas temporárias de termos constantes	96
4.3.1. Rendas temporárias e imediatas de termos postecipados e constantes	96
4.3.2. Rendas temporárias e imediatas de termos antecipados e constantes	100

4.3.3. Rendas temporárias e diferidas de termos postecipados e constantes	103
4.3.4. Rendas temporárias e diferidas de termos antecipados e constantes	105
4.4. Rendas perpétuas de termos constantes	107
4.4.1. Rendas perpétuas e imediatas de termos constantes	107
4.4.2. Rendas perpétuas e diferidas de termos constantes	108
4.5. Rendas temporárias de termos variáveis	109
4.5.1. Rendas temporárias de termos a variar em progressão aritmética	110
4.5.2. Rendas temporárias de termos a variar em progressão geométrica	113
Conceitos	116
Formulário	117
Exercícios propostos com resolução	118
Exercícios propostos com solução	123

Capítulo 5

Produtos de financiamento de longo prazo

5.1. Empréstimos clássicos	133
5.1.1. Sistemas de reembolso de empréstimos	133
5.1.1.1. Prestações constantes	135
5.1.1.2. Amortizações constantes de capital	151
5.2. Empréstimos obrigacionistas	155
5.2.1. Aspectos gerais	155
5.2.2. Modalidades de emissão de obrigações	157
5.2.3. Modalidades de reembolso	158
5.2.3.1. Amortização única de capital na maturidade	159
5.2.3.2. Amortização de capital escalonada no prazo	161
5.3. Locação financeira	165
5.4. Locação operacional	167
Conceitos	169
Formulário	170

Exercícios propostos com resolução	171
Exercícios propostos com solução	177
Capítulo 6	
Produtos de financiamento de curto prazo	
6.1. Conta corrente caucionada	185
6.2. Descoberto bancário autorizado em conta de depósitos à ordem	188
6.3. <i>Factoring</i>	188
6.4. <i>Confirming</i>	190
6.5. Cartão de crédito	191
6.6. <i>Hot Money</i>	191
6.7. Papel comercial	192
6.8. Crédito documentário	192
6.9. Desconto bancário e reforma de letras	193
6.10. Desconto bancário de livranças	199
Conceitos	202
Formulário	203
Exercícios propostos com resolução	204
Exercícios propostos com solução	210
Casos práticos resolvidos	217
Apêndice 1 – Resolução dos exercícios	235
Apêndice 2 – Solução dos exercícios	307
Apêndice 3 – Formulário geral	321

Nota Introdutória

Objetivo

Este livro, elaborado por uma equipa de docentes que leciona matemática financeira/cálculo financeiro no ensino superior há mais de vinte anos, surge da vontade de disponibilizar aos estudantes uma obra apelativa e estimulante, pela simplicidade de linguagem e pela sistematização dos conceitos acompanhados da exemplificação prática, sem prejuízo do rigor científico que as matérias apresentadas exigem. Esta foi a orientação subjacente à realização desta obra, para a qual contribuiu a experiência académica e profissional dos autores, que suscitou um profícuo debate com repercussões importantes no conteúdo e na organização do livro.

O objetivo principal deste manual consiste em fornecer uma abordagem acessível e rigorosa, sem ser exaustiva, do estudo de operações financeiras realizadas por empresas e por particulares, apoiada em exemplos ilustrativos e exercícios resolvidos, de modo a que os leitores facilmente apreendam e consolidem os conhecimentos.

Destinatários

Este livro é especialmente recomendado aos estudantes do ensino superior e formandos em cursos de pós-graduação e de formação profissional, no apoio à aprendizagem de unidades curriculares, como sejam, Matemática Financeira, Cálculo Financeiro, Cálculo e Instrumentos Financeiros e outras similares. O livro será interessante também para um público mais vasto, onde se incluem responsáveis financeiros de empresas e outras organizações, gestores, profissionais do setor bancário, bem como para todos aqueles que necessitem de fundamentar a tomada de decisões financeiras.

Estrutura

O livro é composto por seis capítulos. Nos quatro primeiros expõem-se os conteúdos fundamentais da matemática financeira, sendo os dois últimos dedicados aos produtos de financiamento.

No **Capítulo 1** encontram-se os conceitos básicos imprescindíveis à boa compreensão das diversas matérias tratadas. O **Capítulo 2** discorre, genericamente, sobre o valor do dinheiro ao longo do tempo, mediante o estudo das operações de capitalização e de atualização, bem como de equivalência de capitais, em regime de juro simples e em regime de juro composto. O **Capítulo 3** incide sobre as taxas de juro, sistematizando os diferentes tipos de taxas usualmente apresentadas nos preços das instituições bancárias. Por sua vez, o **Capítulo 4** aborda as rendas financeiras, instrumento de especial relevância em inúmeras situações da gestão pessoal e empresarial, como sejam, o cálculo da prestação de um empréstimo, e de uma renda de um contrato de *leasing* ou o resultado de um plano de poupança.

O **Capítulo 5** versa sobre produtos de financiamento de médio e longo prazo, nomeadamente, os empréstimos clássicos, os empréstimos titulados por obrigações e a locação financeira e operacional. Por fim, o **Capítulo 6** é dedicado aos produtos de financiamento de curto prazo. Não se pretende apresentar um estudo exaustivo destes produtos, tendo a preocupação de realçar as principais características dos que constituem fonte de financiamento mais comum das empresas.

Todos os capítulos são enriquecidos com uma sistematização de conceitos fundamentais, um formulário, um conjunto de exercícios de aplicação com resolução e outro de exercícios propostos com solução. A **resolução dos exercícios** encontra-se no Apêndice 1, e no Apêndice 2 são apresentadas as **soluções dos exercícios propostos**.

Antecedendo os apêndices e com o intuito de demonstrar a aplicabilidade dos conteúdos estudados a situações concretas da gestão empresarial, foram desenvolvidos dois **Casos Práticos** que abrangem as matérias tratadas nos diferentes capítulos.

O livro termina com um **formulário geral** no Apêndice 3.

Capítulo 1

Conceitos básicos

A matemática financeira é um ramo da matemática aplicado ao estudo de operações financeiras realizadas por empresas e por particulares, sendo uma ferramenta fundamental para a compreensão do valor do dinheiro no tempo, conceito fulcral e transversal a inúmeras matérias das finanças. Permite responder a diversas questões, por exemplo, como aplicar um capital para o qual se dispõe de diversas alternativas de investimento? Qual o valor a pagar de imediato por uma dívida, se desejar prescindir do seu pagamento a prestações? Comprar ou arrendar um imóvel? Qual o valor em dívida de um empréstimo após a liquidação de algumas prestações?

O presente capítulo introduz os conceitos essenciais ao desenvolvimento das temáticas da matemática financeira apresentadas neste livro, bem como à assimilação dos conteúdos expostos nos capítulos seguintes.

1.1. Operações financeiras ativas e passivas

O setor financeiro composto pelas instituições financeiras, instituições de crédito e sociedades financeiras, constitui um dos setores mais importantes na economia de qualquer país. Qualquer pessoa, empresa privada ou instituição pública necessita de recorrer aos serviços oferecidos pelas instituições financeiras, nomeadamente para pagamento de despesas, obtenção de financiamentos e realização de aplicações.

No âmbito da sua atividade, as instituições financeiras realizam operações financeiras que conduzem à alteração do valor do dinheiro (ou capital) que serve de base à operação.

Operação financeira: ato que visa gerar recursos financeiros, produzindo ou modificando um capital.

As principais características de uma operação financeira são a sua duração (operação de curto, médio ou longo prazo), a taxa de juro a que o capital será sujeito (fixa ou variável) e a forma de pagamento, que pode ser simples (um vencimento de capital) ou complexa (diversos vencimentos de capital).

A caracterização das operações financeiras em ativas e passivas está associada à forma de contabilização dessas operações no balanço das instituições que as realizam, ou seja, as operações ativas referem-se às aquelas que ficam registadas no seu ativo e as operações passivas às que figuram no seu passivo.

Desta forma, operações ativas são as operações realizadas pelas instituições financeiras que irão determinar, pela sua parte, o recebimento de juros e/ou comissões, como por exemplo:

- Manutenção de contas;
- Desconto de títulos (e.g., letras e livrâncias);
- Concessão de empréstimos (e.g., contas empréstimo e contas correntes caucionadas);
- Autorização de descobertos bancários;
- Concessão de créditos por assinatura (e.g., garantias, fianças e avales).

Operação ativa: operação financeira que origina o recebimento de juros e/ou comissões por parte da instituição financeira.

As operações passivas são aquelas em que os clientes aplicam o seu dinheiro sob a responsabilidade ou administração das instituições financeiras, seja depositando em conta ou mediante investimentos em produtos financeiros, e que irão determinar, por parte das instituições, o pagamento de juros, como por exemplo:

- Depósitos à ordem;
- Depósitos a prazo;
- Contas poupança.

Operação passiva: operação financeira que origina o pagamento de juros por parte da instituição financeira.

1.2. Capital, tempo, juro e taxa de juro

No conceito de operação financeira está implícita a existência de um capital de natureza financeira, cujo valor será alterado ao longo do tempo, dado que fica sujeito a uma determinada remuneração.

Entende-se por capital o conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente), cedidos ou aplicados durante um determinado espaço de tempo, temporária ou definitivamente, produzindo uma certa remuneração para o seu titular (proprietário).

Capital (C): conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente).

O tempo corresponde ao prazo durante o qual o capital é aplicado, sendo observado numa base periódica, isto é, o fator tempo será considerado em espaços de tempo mais curtos ou mais longos, aos quais é referida a remuneração do capital.

Cada um desses espaços de tempo, denomina-se por período e poderá ser, por exemplo, anual, semestral, trimestral, mensal ou diário.

Tempo (n): corresponde ao prazo (ou espaço de tempo) durante o qual o capital é aplicado.

O capital sofre alteração ao longo do tempo devido à existência de uma remuneração, a atribuir ao seu titular, que se denomina juro. Em termos gerais, o juro consiste no incremento sofrido por um capital aplicado durante um determinado prazo, ou seja, corresponde à remuneração recebida em contrapartida da cedência do capital.

Neste sentido, o juro corresponde à diferença entre o total dos valores entregues pelo devedor no final da operação e o capital cedido pelo credor.

O juro produzido numa operação financeira irá depender do capital envolvido, da taxa de juro aplicada e do tempo da operação, vencendo-se periodicamente.

Juro (J): remuneração de um capital cedido ou aplicado temporariamente pelo seu titular.

O valor dos juros reflete a taxa a que o capital esteve sujeito. Esta taxa é expressa em percentagem e representa o acréscimo sofrido por uma unidade de capital, aplicada durante uma unidade de tempo. A taxa de juro traduz o valor dos juros em termos relativos.

Na prática, a taxa de juro é referida a 100 unidades de capital dado que é apresentada em termos percentuais. Logo, representa o rendimento de 100 unidades de capital aplicadas durante uma unidade de tempo.

Taxa de Juro (i): corresponde ao rácio entre a remuneração gerada e o montante do capital envolvido na operação financeira, durante uma unidade de tempo.

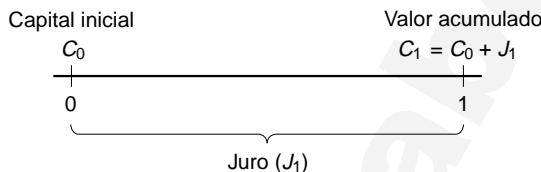
1.3. Capitalização, valor acumulado, atualização e valor atual

O processo de acumulação de capital resultante da produção de juros, designa-se por capitalização. O lapso de tempo ao fim do qual se adiciona juro ao capital, denomina-se por **período de capitalização** e, o número de vezes em que, em certo período, se adiciona juro ao capital corresponde à **frequência de capitalização**.

A título de exemplo, um depósito a prazo que vence juros semestralmente a uma taxa de juro anual, terá um período de capitalização semestral (cada 6 meses) e a frequência de capitalização será igual a 2 (isto é, 2 capitalizações semestrais num ano).

O capital que resulta da adição do juro ao capital inicial corresponde ao valor acumulado.

Esquematicamente:



O capital inicial C_0 no decurso do tempo irá transformar-se no valor acumulado C_1 , que corresponde ao seu valor inicial (C_0) acrescido do juro (J_1) referente ao tempo compreendido entre 0 e 1.

Capitalização: adição do juro ao capital no momento em que o juro se vence.

Valor acumulado: corresponde ao capital inicial adicionado dos respetivos juros.

A atualização ou desconto corresponde à operação inversa da capitalização, isto é, consiste em deduzir de um capital futuro os juros ainda não vencidos (prémio de desconto – D). O desconto apenas se justifica se recuarmos no tempo, ou seja, é relevante nos casos em que, por exemplo, um devedor pretenda liquidar o capital em dívida ou um credor receber o seu crédito, antes da data do seu vencimento.

O capital que resulta da subtração do juro (prémio de desconto) ao valor acumulado corresponde ao valor atual.

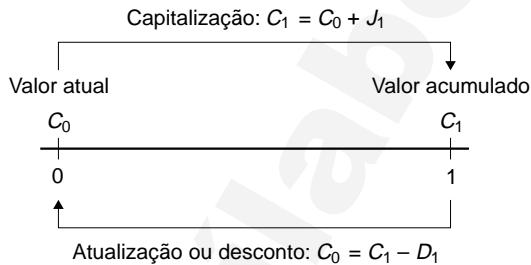
Esquematicamente:



Atualização ou desconto: consiste em deduzir de um capital futuro os juros ainda não vencidos (prémio de desconto).

Valor atual: corresponde ao valor acumulado deduzido dos respetivos juros (prémio de desconto).

Em resumo:



C_1 é o valor acumulado ou capitalizado de C_0 no momento 1 e, por sua vez, C_0 é o valor atualizado ou descontado do capital C_1 no momento 0.

1.4. Regimes de juros

Os processos de capitalização ou atualização ocorrem, normalmente, de acordo com os seguintes regimes de juros:

- **Regime de juro simples:** neste regime, os juros são retirados do processo de capitalização no momento do seu vencimento. Por conseguinte, o capital sobre o qual se efetua o cálculo dos juros permanece constante durante o prazo da operação. Sendo o capital constante, e não havendo alteração da taxa, o juro em cada momento de vencimento também é constante.
- **Regime de juro composto:** neste regime, os juros são integrados no processo de capitalização no momento do seu vencimento. Desta forma, o capital sobre o qual se efetua o cálculo dos juros é crescente, dando origem à obtenção de juros sobre juros. Dado que o capital é crescente, os juros obtidos em cada momento de vencimento também são crescentes.

Os referidos processos poderão desenvolver-se ainda, segundo regimes mistos que resultam da combinação das características dos dois regimes anteriores.

No capítulo seguinte, apresentam-se as características e as fórmulas de cálculo de cada um dos principais regimes de juros mencionados.

Conceitos

- **Operação financeira:** ato que visa gerar recursos financeiros, produzindo ou modificando um capital.
- **Operação ativa:** operação financeira que origina o recebimento de juros e/ou comissões por parte da instituição financeira.
- **Operação passiva:** operação financeira que origina o pagamento de juros por parte da instituição financeira.
- **Capital (C):** conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente).
- **Tempo (n):** corresponde ao prazo (ou espaço de tempo) durante o qual o capital é aplicado.
- **Juro (J):** remuneração de um capital cedido ou aplicado temporariamente pelo seu titular.
- **Taxa de Juro (i):** corresponde ao rácio entre a remuneração gerada e o montante do capital envolvido na operação financeira, durante uma unidade de tempo.
- **Capitalização:** adição do juro ao capital no momento em que o juro se vence.
- **Período de capitalização:** lapso de tempo ao fim do qual se adiciona juro ao capital.
- **Frequência de capitalização:** número de vezes em que, em certo período, se adiciona juro ao capital.
- **Valor acumulado:** corresponde ao capital inicial adicionado dos respetivos juros.
- **Atualização ou desconto:** consiste em deduzir de um capital futuro os juros ainda não vencidos (prémio de desconto).
- **Valor atual:** corresponde ao valor acumulado deduzido dos respetivos juros (prémio de desconto).

Capítulo 2

Regimes de juros

O Capítulo 2 caracteriza o regime de juro simples e o regime de juro composto. Será realçada a principal diferença entre estes dois regimes de capitalização, que se traduz no facto de em regime de juro simples os juros serem retirados do processo de capitalização no momento do seu vencimento, o que não sucede em regime de juro composto.

Dado o seu interesse prático, no estudo do regime de juro simples serão apresentadas as modalidades de cálculo do prémio de desconto a adotar aquando da antecipação de um pagamento (desconto financeiro e desconto comercial).

Estudados os conceitos de capitalização e atualização em ambos os regimes de juros, estes são aplicados à equivalência de capitais, operação que requer a aplicação de um princípio básico da matemática financeira, segundo o qual, qualquer operação financeira sobre dois ou mais capitais deve ter por base um único momento de referência.

No âmbito do regime de juro composto, introduz-se a capitalização dos juros num intervalo infinitesimal do tempo (capitalização contínua ou instantânea), dada a sua utilidade na avaliação de produtos financeiros.

FERNANDA MATIAS é professora coordenadora principal da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo da Universidade do Algarve. Doutora em Gestão de Empresas na especialidade de Finanças (ISCTE-IUL), tem lecionado temas nas áreas das Finanças em cursos de mestrado e de licenciatura. Ainda no âmbito da sua atividade universitária exerceu funções de pró-reitora e de vice-reitora da Universidade do Algarve. É coautora de livros sobre Finanças Empresariais, tendo também artigos publicados.

ANA MARTINS é professora coordenadora da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo da Universidade do Algarve, sendo atualmente Subdiretora da ESGHT. Doutora em Ciências Económicas e Empresariais na especialidade de Gestão, pela Universidade do Algarve, tem lecionado diversas unidades curriculares nas áreas das Finanças em cursos de mestrado e de licenciatura. Colaborou em diversos projetos empresariais na área de consultoria financeira.

CARLOS MONTEIRO é professor adjunto da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo da Universidade do Algarve. Detentor do título de especialista na área científica de Finanças, Banca e Seguros, tem lecionado diversas unidades curriculares nas áreas das Finanças e Empreendedorismo. A nível profissional, não académico, é consultor financeiro e tem vários anos de experiência em auditoria.

TELMA CORREIA é professora adjunta da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo da Universidade do Algarve, na área da gestão financeira, desde 1998. É mestre em Finanças Empresariais pela Universidade do Algarve, tem lecionado diversas unidades curriculares nas áreas das Finanças em cursos de mestrado e de licenciatura. É autora do livro *As Empresas Familiares Portuguesas: Determinantes da Estrutura de Capital* (2008).

Este livro, fruto da experiência académica e profissional dos seus autores, é especialmente recomendado aos estudantes do ensino superior e formandos em cursos de pós-graduação e de formação profissional, no apoio à aprendizagem de unidades curriculares de Matemática Financeira, Cálculo Financeiro ou em quaisquer outras em que esta matéria seja abordada. Responsáveis financeiros de empresas e outras organizações, gestores, quadros do setor bancário, bem como todos aqueles que, por motivos profissionais ou pessoais, necessitem de fundamentar a tomada de decisões financeiras poderão também consultar com vantagens este manual para reavivar, consolidar ou dar os primeiros passos nos conceitos e na prática de uma das áreas mais importantes da matemática aplicada.

- **Sistematização dos conceitos e formulário no final de cada capítulo**
- **Exercícios resolvidos e propostos com solução**
- **Formulário geral no final**
- **Dois casos práticos abrangendo toda a matéria**

